LINEARE ALGEBRA

ÜBUNGSBLATT 12

1. Man betrachte die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, mit der Matrix bezüglich der kanonischen Basis $e = (e_1, e_2, e_3)$ von $\mathbb{R}^3$:

a) $[f]_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

b) $[f]_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $[f]_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $[f]_e = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

e) $[f]_e = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ -4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$.

Für jeden Fall, bestimme man die Eigenwerte und die bezügliche Eigenvektoren, und diagonalisiere man den Endomorphismus (das heßt sage man ob der Endomorphismus diagonalisierbar ist, und wenn die Antwort ja ist, finde man die Diagonalform und die Basis bezüglich der, die Matrix des Endomorphismus diagonal ist).

2. Man betrachte die lineare Abbildung $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$, mit der Matrix bezüglich der kanonischen Basis $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ von $\mathbb{R}^4$:

a) $[f]_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $[f]_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Für jeden Fall, diagonalisiere man den Endomorphismus.

3. Man finde, je ein Beispiel von ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$, so dass:

a) nicht alle Eigenwerte von f zu $\mathbb{R}$ gehören;
b) alle Eigenwerte von f zu $\mathbb{R}$ gehören, aber f nicht diagonalisierbar ist.

4. Man betrachte den Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ gegeben durch:

$$\begin{cases} f(e_1) = 5e_1 - e_2 + e_3, \\ f(e_2) = 6e_1 + 2e_3, \\ f(e_3) = -3e_1 + e_2 - e_3, \end{cases}$$

wobei $e = (e_1, e_2, e_3)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

a) Man schreibe die Ausdruck von $f(x)$ für jedes $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;
b) Man diagonalisiere f.

"Babeş-Bolyai" Universität, Fakultät für Mathematik und Informatik, RO-400084, Cluj-Napoca, Rumänien

E-mail address, George Ciprian Modoi: `cmodoi@math.ubbcluj.ro`